Formelsammlung

Wirtschaftsmathematik

Quelle: Auer / Seitz Grundkurs Wirtschaftsmathematik

Erweitert/modifiziert von Prof. Dr. Tobias Hagen

Stand Oktober 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Grundlagen

1.1 Summenzeichen

- $\sum_{i=k}^{m} a_i = a_k + a_{k+1} + a_{k+2} + \ldots + a_m$
- $\sum_{i=k}^{m} (a_i + b_i) = \sum_{i=k}^{m} a_i + \sum_{i=k}^{m} b_i$
- $\sum_{i=k}^{m} a_i = \sum_{i=k}^{l} a_i + \sum_{i=l+1}^{m} a_i \quad \text{für} \quad k \le l < m$
- $\sum_{i=k}^{m} c = (m-k+1) \cdot c$
- $\sum_{i=k}^{m} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=k}^{m} a_i$
- $\sum_{i=k}^{m} (a_i + c) = \sum_{i=k}^{m} a_i + (m-k+1) \cdot c$

1.2 Doppelsummen

- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} + a_{i2} + a_{i3} + \ldots + a_{in} = a_{11} + a_{12} + a_{13} + \ldots + a_{1n} + \ldots + a_{m1} + a_{m2} + a_{m3} + \ldots + a_{mn}$
- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c \cdot a_{ij} = c \cdot \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$
- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + c) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + m \cdot n \cdot c$
- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} + b_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} + m \cdot \sum_{j=1}^{n} b_j$
- $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_j = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} b_j \cdot a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$

1.3 Produktzeichen

- $\prod_{i=k}^{m} a_i = a_k \cdot a_{k+1} \cdot a_{k+2} \cdot \ldots \cdot a_m$
- $\prod_{i=k}^{m} a_i \cdot b_i = \prod_{i=k}^{m} a_i \cdot \prod_{i=k}^{m} b_i$
- $\prod_{i=k}^{m} c = c^{m-k+1}$
- $\prod_{i=k}^{m} c \cdot a_i = c^{m-k+1} \cdot \prod_{i=k}^{m} a_i$

1.4 Fakultätszeichen und Binomialkoeffizient

- $n! = \prod_{i=1}^{n} i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot n$ Man beachte: $0! = 1$
- $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ Man beachte: $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

1.5 Binomische Formeln und binomischer Lehrsatz

- Erste binomische Formel: $(a+b)^2 = (a+b)\cdot(a+b) = a^2 + 2ab + b^2$
- Zweite binomische Formel: $(a-b)^2 = (a-b)\cdot(a-b) = a^2 - 2ab + b^2$
- Dritte binomische Formel: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$
- Binomischer Lehrsatz:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

1.6 Potenzregeln

- $a^0 = 1$
- $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
- $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$
- $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
- $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

1.7 Logarithmusregeln

- $a^x = b \leftrightarrow x = \log_a b = \frac{\log b}{\log a} = \frac{\ln b}{\ln a}$ für $a, b > 0,\ a \neq 1$
- $\log_{10} x = \log x$
- $\log_e x = \ln x$
- $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a (x^r) = r \cdot \log_a x$
- $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$
- $\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n}\log_a x$

2. Folgen und Reihen

2.1 Arithmetische Folgen und Reihen

Differenz konstant: $a_{n+1} - a_n = d$

Glieder der arithmetischen Folge: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Glieder der arithmetischen Reihe: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = n \cdot a_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot d$

2.2 Geometrische Folgen und Reihen

Quotient konstant: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q$

Glieder der geometrischen Folge: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Glieder der geometrischen Reihe: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Unendliche geometrische Reihe: $s = \frac{a_1}{1-q}$

3. Finanzmathematik

K_0	=	Anfangskapital, Barwert bzw. Anschaffungswert
K_n	=	Endkapital nach n Zinsperioden bzw. Restbuchwert nach n Abschreibungen
p	=	Zinssatz in %
i	=	Zinssatz in Dezimalschreibweise (p/100)
q	=	Aufzinsungsfaktor 1 + i
v	=	Abzinsungsfaktor 1/q
n	=	Laufzeit
k	=	Zwischenperiode
r	=	Rente, Rate, Abschreibungsbetrag
R_k	=	Restwert nach k Perioden (bei Renten und Abschreibungen)
S_0	=	Anfangsschuld
S_k	=	Restschuld nach k Perioden
a	=	Annuität
t	=	Tilgung

3.1 Einfache Verzinsung

Barwert: $$K_0 = \frac{K_n}{1+n \cdot i}$$

Endkapital: $$K_n = (1+n \cdot i) \cdot K_0$$

Laufzeit: $$n = \frac{K_n - K_0}{i \cdot K_0}$$

Zinssatz: $$i = \frac{K_n - K_0}{n \cdot K_0}$$

3.2 Zinseszins

Barwert: $$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

Endkapital: $$K_n = K_0 \cdot (1+i)^n$$

Laufzeit: $$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln(1+i)}$$

Zinssatz: $$i = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} - 1$$

3.3 Zinseszins bei unterjähriger und stetiger Verzinsung

Quartalsweise Verzinsung: $$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{4}\right)^{n \cdot 4}$$

Monatliche Verzinsung: $$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{12}\right)^{n \cdot 12}$$

Tägliche Verzinsung: $$K_n = K_0 \cdot \left(1+\frac{i}{360}\right)^{n \cdot 360}$$

Stetige Verzinsung: $$K_n = K_0 \cdot e^{i \cdot n}$$

3.4 Ratenverträge

3.4.1 Vorschüssige Einzahlung

Annahme: Mehrmalige Einzahlungen in gleicher Höhe r

Endkapital: $$K_n = r \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Laufzeit: $$n = \frac{\ln\left(1+\frac{(q-1) \cdot K_n}{r \cdot q}\right)}{\ln q}$$

Einzahlung: $$r = \frac{K_n}{q} \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

3.4.2 Nachschüssige Einzahlung

Annahme: Mehrmalige Einzahlungen in gleicher Höhe $\overline{r}$

Endkapital: $$\overline{K}_n = \overline{r} \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

Laufzeit: $$n = \frac{\ln\left(1 + \frac{(q-1)\cdot \overline{K}_n}{\overline{r}}\right)}{\ln q}$$

Einzahlung: $$\overline{r} = \overline{K}_n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$$

3.5 Renten

3.5.1 Vorschüssige Rente

Annahme: Mehrmalige Auszahlungen in gleicher Höhe r

Barwert: $$R_0 = r \cdot \frac{1-v^n}{1-v}$$

Rente: $$r = R_0 \cdot \frac{1-v}{1-v^n}$$

Endkapital: $$R_k = R_0 \cdot q^k - r \cdot q \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$$

Laufzeit: $$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{R_0 \cdot (1-v)}{r}\right)}{\ln v}$$

3.5.2 Nachschüssige Rente

Annahme: Mehrmalige Auszahlungen in gleicher Höhe $\overline{r}$

Barwert: $$\overline{R}_0 = \overline{r} \cdot v \cdot \frac{1-v^n}{1-v}$$

Rente: $$\overline{r} = \frac{\overline{R}_0}{v} \cdot \frac{1-v}{1-v^n}$$

Endkapital: $$R_k = \overline{R}_0 \cdot q^k - \overline{r} \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$$

Laufzeit: $$n = \frac{\ln\left(1 - \frac{\overline{R}_0 \cdot (1-v)}{\overline{r} \cdot v}\right)}{\ln v}$$

3.5.3 Wachsende nachschüssige Rente

Fall: Nachschüssige Rente, die jedes Jahr um den Faktor (1 + g) = w wächst.

$$\overline{R}_0 = \overline{r} \cdot \frac{1 - \left(\frac{w}{q}\right)^n}{i-g}$$

Für i > g und n → ∞ gilt: $$\overline{R}_0 = \frac{\overline{r}}{i-g}$$

3.5.4 Ewige Rente

$r = K_0 \cdot (q-1)$ → Dies entspricht den Zinsen.

3.7 Tilgungen

3.7.1 Tilgungsplan bei annuitätischer Tilgung

Jahr	Restschuld JA	Zinsen	Tilgung	Annuität	Restschuld JE
1	S_0	$z_1 = S_0 \cdot i$	t_1	$a = z_1 + t_1$	$S_1 = S_0 - t_1$
2	$S_1 = S_0 - t_1$	$z_2 = S_1 \cdot i = (S_0 - t_1) \cdot i$ $= z_1 - t_1 \cdot i$	$t_2 = a - z_2$ $= (z_1 + t_1) - (z_1 - t_1 \cdot i)$ $= t_1 \cdot (1 + i)$	$a = z_2 + t_2$ $= z_1 + t_1$	$S_2 = S_1 - t_2$
3	$S_2 = S_1 - t_2$	$z_3 = S_2 \cdot i$ $= z_2 - t_2 \cdot i$	$t_3 = a - z_3$ $= (z_2 + t_2) - (z_2 - t_2 \cdot i)$ $= t_2 \cdot (1 + i)$ $= t_1 \cdot (1 + i)^2$	$a = z_3 + t_3$ $= z_1 + t_1$	$S_3 = S_2 - t_3$
...	...	...	...	...	...
k	$S_{k-1} = S_{k-2} - t_{k-1}$	$z_k = z_{k-1} - t_{k-1} \cdot i$	$t_k = t_1 \cdot (1 + i)^{k-1}$	$a = z_k + t_k$ $= z_1 + t_1$	$S_k = S_{k-1} - t_k$
...	...	...	...	...	...

3.7.2 Formeln bei annuitätischer Tilgung

Restschuld nach k-Jahren: $S_k = S_0 - t_1 \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$ oder $S_k = S_0 \cdot q^k - a \cdot \frac{1-q^k}{1-q}$

Anfangsschuld: $S_0 = \frac{a}{q^n} \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Annuität: $a = S_0 \cdot q^n \cdot \frac{1-q}{1-q^n}$

Summe Tilgungszahlungen: $\sum t_n = t_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Tilgung im k-ten Jahr: $t_k = t_1 \cdot (1+i)^{k-1}$

Laufzeit: $n = \frac{\ln\left(1 - \frac{S_0 \cdot (1-q)}{t_1}\right)}{\ln q}$

3.8 Abschreibungen

3.8.1 Lineare Abschreibung

Konstante Abschreibungsrate: $r = \frac{K_0 - K_n}{n}$

Restbuchwert nach k Perioden: $R_k = K_0 - k \cdot r = K_0 - k \cdot \frac{K_0 - K_n}{n}$

3.8.2 Geometrisch degressive Abschreibung

Abschreibungsrate der k-ten Periode: $r_k = K_0 \cdot (1-i)^{k-1} \cdot i$

Restbuchwert nach k Perioden $K_k = K_0 \cdot (1-i)^k$

3.8.3 Arithmetisch degressive Abschreibung

Abschreibungsrate der k-ten Periode: $r_k = r_1 - (k-1) \cdot d$

Restbuchwert nach k Perioden: $K_k = K_0 - \frac{k}{2} \cdot [2r_1 - (k-1) \cdot d]$

4. Grenzwerte

4.1 Rechenregeln

- $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \pm \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \varphi \pm \varphi'$
- $\lim\limits_{x\to\alpha}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = \varphi \cdot \varphi'$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)}{\lim\limits_{x\to\alpha} g(x)} = \dfrac{\varphi}{\varphi'}$ für $g(x) \neq 0$ und $\varphi' \neq 0$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = k$, falls $f(x) = k$ für alle $x \in D(f)$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x)+k) = \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) + k = \varphi + k$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} k\cdot f(x) = k \cdot \lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = k\cdot\varphi$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} (f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\right)^n = \varphi^n$ bzw. $\lim\limits_{x\to\alpha} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)} = \sqrt[n]{\varphi}$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} (a^{f(x)}) = a^{\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)} = a^{\varphi}$
- $\lim\limits_{x\to\alpha} (\log_a f(x)) = \log_a\left(\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)\right) = \log_a \varphi$ für $a, \varphi > 0,\ a \neq 1$

4.2 Grenzwerte spezieller Funktionen

4.2.1 Potenzfunktionen

- $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ für $n \in \mathbb{R}^+$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und gerade} \\ -\infty & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und ungerade} \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^n = 0$ für $n \in \mathbb{R}^+$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^n} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0$ für $n \in \mathbb{R}^+$
- $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$ für $n \in \mathbb{R}^+$
- $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und gerade} \\ -\infty & \text{für } n \in \mathbb{N} \text{ und ungerade} \end{cases}$

4.2.2 Exponenzialfunktionen

- $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = \begin{cases} 0 & \text{für } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ +\infty & \text{für } a > 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{-x} = \begin{cases} +\infty & \text{für } 0 < a < 1 \\ 1 & \text{für } a = 1 \\ 0 & \text{für } a > 1 \end{cases}$
- $\lim\limits_{x\to 0} a^x = \lim\limits_{x\to 0} a^{-x} = 1$ für $a > 1$

4.2.3 Logarithmusfunktionen

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty \quad$ für $\quad a > 1$
- $\lim\limits_{x \to 1} \log_a x = 0 \quad$ für $\quad a > 1$
- $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = -\infty \quad$ für $\quad a > 1$

4.2.4 Weitere Funktionen

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0 \quad$ für $\quad n \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0+} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0+} (1 - x)^{\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{e}$

5. Differenzialrechnung - Ableitungsregeln

- Differenzialquotient:

$$y = f(x) \to y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Potenzregel:

$$y = x^n \quad \to \quad y' = n \cdot x^{n-1}$$

- Konstantenregel:

$$y = a \cdot g(x) \quad \to \quad y' = a \cdot g'(x) \qquad \text{Fall 1: } y = a \cdot x^n \quad \to \quad y' = a \cdot n \cdot x^{n-1}$$

$$\text{Fall 2: } y = a = a \cdot x^0 \quad \to \quad y' = 0$$

- Summenregel:

$$y = f(x) \pm g(x) \quad \to \quad y' = f'(x) \pm g'(x)$$

- Produktregel:

$$y = f(x) \cdot g(x) \quad \to \quad y' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$$

- Quotientenregel:

$$y = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \to \quad y' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - g'(x) \cdot f(x)}{[g(x)]^2}$$

- Kettenregel:

$$y = f(g(x)) \text{ mit } z = g(x) \quad \to \quad y' = \frac{d\ f(z)}{z} \cdot \frac{d\ g(x)}{x} = f'(z) \cdot g'(x)$$

- Exponentialfunktion:

$$y = e^x \quad \to \quad y' = e^x$$

$$y = a^x \quad \to \quad y' = a^x \cdot \ln a$$

$$y = a^{g(x)} \to \quad y \ = a^{g(x)} \cdot g'(x) \cdot \ln a$$

- Logarithmusfunktion:

$$y = \ln x \quad \to \quad y' = \frac{1}{x}$$

$$y = \log_a x \quad \to \quad y' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

- Logarithmierte Funktion:

$$y = \log_a(g(x)) \quad \to \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(x)}{g(x) \cdot \ln a} \qquad \text{Fall: } y = \ln(g(x)) \quad \to \quad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{g'(x)}{g(x)}$$

- Ableitung einer Umkehrfunktion:

$$y = f(x) \to x = f^{-1}(y) = g(y) = g(f(x))$$

$$\to \frac{dg}{dy} = \frac{1}{f'(x)}$$

6. Wachstumsraten

6.1 Stetige Wachstumsraten

$$y = f(t) \rightarrow w_y^s = \frac{\frac{dy}{dt}}{y} = \frac{f'(t)}{f(t)} = \frac{d\ln y}{dt} \quad (= \ln y_t - \ln y_{t-1})$$

Kombination mehrerer Variablen:

- $y = u \cdot v \rightarrow w_y^s = \frac{d\ln u}{dt} + \frac{d\ln v}{dt} = w_u^s + w_v^s$
- $y = \frac{u}{v} \rightarrow w_y^s = \frac{d\ln u}{dt} - \frac{d\ln v}{dt} = w_u^s - w_v^s$
- $y = u + v \rightarrow w_y^s = \frac{u}{\underbrace{u+v}_{\substack{\text{Anteil von u} \\ \text{am Gesamten}}}} \cdot w_u^s + \frac{v}{\underbrace{u+v}_{\substack{\text{Anteil von v} \\ \text{am Gesamten}}}} \cdot w_v^s$
- $y = u^a \rightarrow w_y^s = \frac{d\ln y}{dt} = a \cdot \frac{d\ln u}{dt} = a \cdot w_u^s$

6.2 Diskrete Wachstumsraten

$$w_y^d = \frac{\Delta y}{y} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1$$

Kombination mehrerer Variablen:

- $y = u \cdot v \rightarrow w_y^d = w_u^d + w_v^d + w_u^d \cdot w_v^d$
- $y = \frac{u}{v} \rightarrow w_y^d = \frac{w_u^d - w_v^d}{w_v^d + 1}$

Fall: Quartalsweise Beobachtungen

- Jahreswachstumsrate: $w_{y,J}^d = \frac{y_t}{y_{t-4}} - 1$
- Quartalswachstumsrate: $w_{y,Q}^d = \frac{y_t}{y_{t-1}} - 1$
- Annualisierte Wachstumsrate: $w_{y,a}^d = \left(\frac{y_t}{y_{t-1}}\right)^4 - 1$

6.3 Zusammenhänge

- $w_y^d = e^{w_y^s} - 1$
- $w_y^s = \ln(1 + w_y^d)$
- $w_y^d \geq w_y^s$

7. Kurvendiskussion - Schematische Darstellung

7.1 Nullstellen einer Funktion

Allgemeine Vorgehensweise: $f(x)\overset{!}{=}0$ und Auflösen nach x

- Polynom 1. Grades:

  $f(x) = ax + b \overset{!}{=} 0 \rightarrow x = -\frac{b}{a}$

- Polynom 2. Grades:

  $f(x) = ax^2 + bx + c \overset{!}{=} 0$

  Quadratische Lösungsformel: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ mit $D = b^2 - 4ac$

  Fall 1: $D > 0 \rightarrow$ Es existieren zwei Nullstellen.

  Fall 2: $D < 0 \rightarrow$ Es existiert keine Nullstelle.

  Fall 3: $D = 0 \rightarrow$ Es existiert genau eine Nullstelle.

- Polynom höheren Grades:

  1. Ausklammern zu einer Produktgleichung
  2. Newton-Verfahren: Wiederhole folgende Vorschrift, bis eine hinreichende Genauigkeit für $f(\alpha_{n+1})=0$ erzielt wurde:

     $\alpha_{n+1} = \alpha_n - \frac{f(\alpha_n)}{f'(\alpha_n)}$

7.2 Entscheidung über Extrema und Sattelpunkte

Es gilt: In einem Extremwert ändert sich die Steigung.

1. Schritt: Bestimmung der kritischen Punkte

$f'(x)\overset{!}{=}0$

2. Schritt: Werte aus dem 1. Schritt in die zweite Ableitung einsetzen

- $f''(x = \alpha) > 0$ $\rightarrow$ Minimum (konvex gekrümmt)
- $f''(x = \alpha) < 0$ $\rightarrow$ Maximum (konkav gekrümmt)
- $f''(x = \alpha) = 0$ $\rightarrow$ keine eindeutige Aussage möglich
  weitere Untersuchung (3. Schritt)

3. Schritt: Bei welcher m-ten Ableitung ist $f^m(\alpha) \neq 0$?

- m-gerade und $f^m(\alpha) < 0$ $\rightarrow$ Maximum
- m-gerade und $f^m(\alpha) > 0$ $\rightarrow$ Minimum
- m-ungerade $\rightarrow$ Sattelpunkt

7.3 Entscheidung über Wendepunkte

Es gilt: In einem Wendepunkt ändert sich die Krümmung von f(x).

1. Schritt: $f''(x)\overset{!}{=}0$

2. Schritt: Einsetzen des Ergebnisses aus dem 1. Schritt in die dritte Ableitung von f(x)

- $f'''(x = \alpha) \neq 0$ $\rightarrow$ Wendepunkt
- $f'''(x = \alpha) = 0$ $\rightarrow$ weitere Untersuchung (3. Schritt)

3. Schritt: Bei welcher m-ten-Ableitung ist $f^m(\alpha) \neq 0$?

- m-gerade $\rightarrow$ keine Aussage möglich
- m-ungerade $\rightarrow$ Wendepunkt

7.4 Entscheidung über Steigung und Krümmung

1. Steigung:
    - $f'(x) > 0$ → Funktion steigt
    - $f'(x) < 0$ → Funktion fällt
    - $f'(x) = 0$ → ggf. Extremwert
2. Krümmung:
    - $f''(x) > 0$ → konvex gekrümmt
    - $f''(x) < 0$ → konkav gekrümmt
    - $f''(x) = 0$ → ggf. Wendestelle

8. Ökonomische Funktionen - Marginalanalyse

8.1 Kostenfunktion

$$C(x) = \underbrace{C_v(x)}_{\text{variable kosten}} + \underbrace{C_f}_{\text{fixe Kosten}}$$

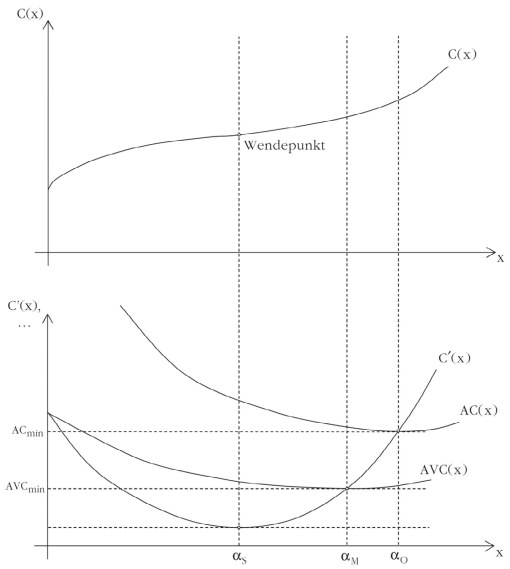
Stückkosten: $AC(x) = \dfrac{C(x)}{x}$

Variable Stückkosten: $AVC(x) = \dfrac{C_v(x)}{x}$

Fixe Stückkosten: $AFC(x) = \dfrac{C_f}{x}$

Grenzkosten: $C'(x) = \dfrac{d\,C(x)}{d\,x}$ (näherungsweise Kostenänderung bei Mengenänderung um eine Einheit)

Ertragsgesetzliche Kostenfunktion:



Schwelle des Ertragsgesetzes $x=\alpha_S$:
Wendepunkte von C(x) und
Minimum von C′ (x)

Betriebsminimum $x=\alpha_M$:
- Minimum von AVC(x)
- Funktionswert $AVC(\alpha_M)$ = kurzfristige Preisuntergrenze AVC_{min}
- $C'(\alpha_M) = AVC(\alpha_M) = AVC_{min}$

Betriebsoptimum $x=\alpha_O$:
- Minimum von AC(x)
- Funktionswert $AC(\alpha_O)$ = langfristige Preisuntergrenze AC_{min}
- $C'(\alpha_O) = AC(\alpha_O) = AC_{min}$

8.2 Erlös-/ Umsatzfunktion

$$R(x) = p(x) \cdot x$$

Durchschnittserlös: $AR(x) = \dfrac{R(x)}{x} = p(x)$

Grenzerlös: $R'(x) = \dfrac{d\,R(x)}{d\,x}$ (näherungsweise Erlösänderung bei Mengenänderung um eine Einheit)

8.3 Gewinnfunktion

$$G(x) = R(x) - C(x) = p(x) \cdot x - C(x)$$

Durchschnittsgewinn: $g(x) = \dfrac{G(x)}{x}$

Gewinnschwelle: $G(x) \overset{!}{=} 0$ und Auflösen nach x

Gewinnmaximum: $G'(x) = R'(x) - C'(x) \overset{!}{=} 0 \quad \leftrightarrow \quad \text{Grenzerlös} \overset{!}{=} \text{Grenzkosten}$
(notwendige Bedingung)

8.4 Elastizität

Unter der (Punkt-) Elastizität $\varepsilon_{y,x}$ versteht man allgemein die relative Veränderung einer Größe y = f(x) im Verhältnis zur relativen Veränderung eines sie bestimmenden Einflussfaktors x:

$$\varepsilon_{y,x} = \frac{\text{relative Änderung der betrachteten Größe y}}{\text{relative Änderung des Einflussfaktors x}} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} \rightarrow \varepsilon_{y,x} = \frac{y'}{\bar{y}} = y' \cdot \frac{x}{y}$$

Es gilt: $\varepsilon_{x,y} = \frac{1}{\varepsilon_{y,x}}$

Abhängig von der Ausprägung des Werts der Elastizität sind folgende Begriffe gebräuchlich:

- $\varepsilon = 0$: vollkommen unelastisch
- $|\varepsilon| < 1$: unelastisch
- $|\varepsilon| > 1$: elastisch
- $|\varepsilon| = 1$: isoelastisch
- $\varepsilon = \pm\infty$: vollkommen elastisch

8.5 Taylor-Approximation

Taylor-Approximation n-ter Ordnung an f(x) für x in der Nähe von α_1:

$$f(x) \approx f(\alpha_1) + \frac{f'(\alpha_1)}{1!} \cdot (x - \alpha_1) + \frac{f''(\alpha_1)}{2!} \cdot (x - \alpha_1)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha_1)}{n!}(x - \alpha_1)^n$$

9. Differenzialrechnung mit mehreren Variablen

9.1 Allgemeines

$y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ y: abhängige Variable

$x_1, x_2, \ldots, x_n$: unabhängige Variablen

Es existieren ebenso viele partielle Ableitungen wie es unabhängige Variablen gibt. Es gelten die üblichen Differenzierungsregeln. Es ist dabei nur zu beachten, dass alle unabhängigen Variablen, bis auf die, nach der differenziert wird, bei der Berechnung der partiellen Ableitung als *konstant* angesehen werden.

Es gilt z. B. für $y = f(x_1, x_2)$:

$$f'_{x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial y}{\partial x_1} \quad \text{und} \quad f'_{x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial y}{\partial x_2}$$

$$f''_{x_1x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2}, \quad f''_{x_2x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2^2} \quad \text{und} \quad f''_{x_1x_2}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_2} = f''_{x_2x_1}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1}$$

9.2 Differenziale

Es gilt für $y = f(x_1, x_2)$:

- Partielles Differenzial nach x_1: $$dy_{x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1$$

  Gibt näherungsweise an, wie sich der Funktionswert y ändert, wenn bei Konstanthaltung von x_2 die Variable x_1 um dx_1 verändert wird.

- Totales Differenzial: $$dy = dy_{x_1} + dy_{x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot dx_2$$

  Gibt näherungsweise an, wie sich der Funktionswert y ändert, wenn x_1 um dx_1 und x_2 um dx_2 verändert wird.

9.3 Absolute Extremwerte

Es gilt für $y = f(x_1, x_2)$:

1. Notwendige Bedingungen:

   $$f'_{x_1}(x_1, x_2) \overset{!}{=} 0 \ \wedge \ f'_{x_2}(x_1, x_2) \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \text{Kritische Punkte}$$

2. Hinreichende Bedingungen:

   Hesse'sche Determinante $D(x_1, x_2) = f''_{x_1x_1} \cdot f''_{x_2x_2} - (f''_{x_1x_2})^2$

   Einsetzen der kritischen Punkte:

   $D(x_1, x_2) < 0 \rightarrow$ Sattelpunkt an der Stelle (x_1, x_2)

   $D(x_1, x_2) = 0 \rightarrow$ keine Entscheidung möglich

   $D(x_1, x_2) > 0 \rightarrow$ Weitere Untersuchung:

   $f''_{x_1x_1}(x_1, x_2) > 0, \ f''_{x_2x_2}(x_1, x_2) > 0 \ \rightarrow$ Minimum an der Stelle (x_1, x_2)

   $f''_{x_1x_1}(x_1, x_2) < 0, \ f''_{x_2x_2}(x_1, x_2) < 0 \ \rightarrow$ Maximum an der Stelle (x_1, x_2)

9.4 Einbeziehen von Nebenbedingungen

Allgemein: $y = f(x_1, x_2)$ mit Nebenbedingung $g(x_1, x_2) = 0$

1. Methode: *Variablensubstitution*

Die Nebenbedingung wird nach einer der Variablen aufgelöst und in die Zielfunktion eingesetzt. So wird eine unabhängige Variable eliminiert und die üblichen Differenzierungs- und Extremwertbestimmungsregeln können angewandt werden.

2. Methode: *Lagrange-Methode*

Die Extrema der Funktion $y = f(x_1,x_2)$ unter der Nebenbedingung $g(x_1,x_2) = 0$ liegen an den Stellen, an denen die sog. Lagrange-Funktion $L(x_1,x_2,\lambda) = f(x_1,x_2) \pm \lambda \cdot g(x_1,x_2)$ mit λ als sog. Lagrange-Multiplikator ihre Extremwerte annimmt. Zusätzliche unabhängige Veränderliche ist also λ.

Notwendige Bedingungen:

$$L'_{x_1} = \frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \pm \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \overset{!}{=} 0$$

$$L'_{x_2} = \frac{\partial L}{\partial x_2} = \frac{\partial f}{\partial x_2} \pm \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial x_2} \overset{!}{=} 0$$

$$L'_{\lambda} = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = \pm g(x_1,\ x_2) \overset{!}{=} 0$$

10. Integralrechnung

10.1 Unbestimmtes Integral

$$\frac{d\,(F(x)+c)}{d\,x} = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x) \quad \text{für } c = \text{konstant}$$

$\int f(x)\ dx = F(x) + c$ mit
- $f(x)$ = Integrand
- $F(x)$ = Stammfunktion
- c = Integrationskonstante

10.2 Wichtige Stammfunktionen

- $\int a\ dx = a \cdot x + c \quad \text{Fall: } \int 1\ dx = x + c$
- $\int x^n\ dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c \quad \text{für } n \neq -1$
- $\int a \cdot x^n\ dx = \frac{a}{n+1} \cdot x^{n+1} + c \quad \text{für } n \neq -1$
- $\int x^{-1}\ dx = \int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + c$
- $\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad \text{für } a > 0 \quad \text{Fall: } \int e^x\ dx = \frac{e^x}{\ln e} + c = e^x + c$
- $\int \ln x\ dx = x \cdot \ln x - x + c \quad \text{für } x > 0$
- $\int e^{a \cdot x + b}\ dx = \frac{1}{a} \cdot e^{a \cdot x + b} + c \quad \text{für } a \neq 0$
- $\int (a \cdot x + b)^n\ dx = \frac{1}{a \cdot (n+1)} \cdot (a \cdot x + b)^{n+1} + c \quad \text{für } n \neq -1$
- $\int \frac{1}{a \cdot x + b}\ dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|a \cdot x + b| + c \quad \text{für } a \cdot x + b > 0$
- $\int \frac{x}{a \cdot x + b}\ dx = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2} \cdot \ln|a \cdot x + b| + c \quad \text{für } a \cdot x + b > 0$

10.3 Integrationsregeln

- Konstanter-Faktor-Regel:

  $\int a \cdot f(x)\ dx = a \cdot \int f(x)\ dx$
- Summenregel:

  $\int [f(x) \pm g(x) \pm \ldots]\ dx = \int f(x)\ dx \pm \int g(x)\ dx \pm \ldots$
- Partielle Integration:

  $\int f(x) \cdot g'(x)\ dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)\ dx$

  Es ist die Funktion als $g'(x)$ zu wählen, die sich leichter integrieren lässt. Mehrmaliges Integrieren kann notwendig sein.
- Integration durch Substitution:

  $\int f(g(x)) \cdot g'(x)\ dx = \int f(z)\ dz \quad \text{mit } z = g(x)$

10.4 Bestimmtes Integral

Berechnung von Flächen zwischen f(x) und der x-Achse:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \qquad \text{mit} \quad a = \text{Untergrenze} \quad \text{und} \quad b = \text{Obergrenze}$$

Berechnung von Flächen zwischen zwei Funktionen f(x) und g(x):

$$f(x) \geq g(x) \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx \rightarrow \text{Fläche zwischen } f(x) \text{ und } g(x) = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$

Eigenschaften bestimmter Integrale:

- Die Konstanter-Faktor-Regel gilt weiterhin.

  $$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

- Die Summenregel bleibt ebenfalls erhalten.

  $$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

- Auch die partielle Integrationsregel bleibt uneingeschränkt gültig.

  $$\int_a^b f(x) \cdot g'(x)\,dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot g(x)\,dx$$

- Bei der Substitution sind die Integrationsgrenzen mitzusubstituieren.

  $$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{z_1=g(a)}^{z_2=g(b)} f(z)\,dz = [F(z)]_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1)$$

10.5 Ökonomische Anwendung: Konsumenten- und Produzentenrente

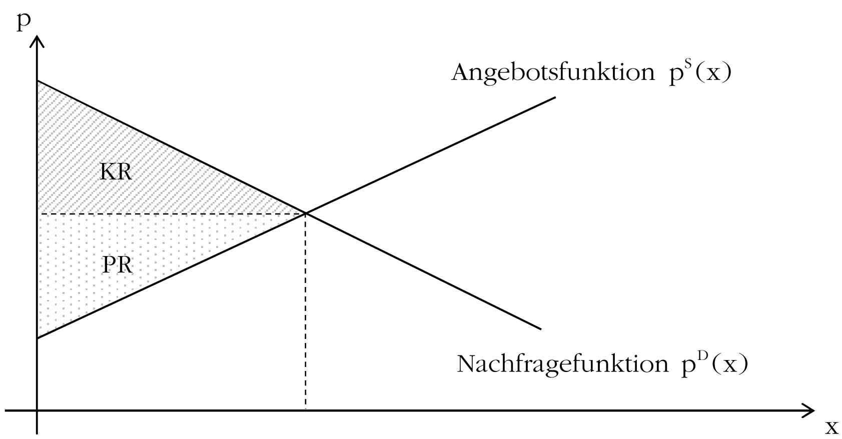
Auf einem Markt wären einige Nachfrager bereit gewesen einen höheren Preis als den bei der Menge x* (Gleichgewichtsmenge) vorherrschenden Marktpreis p* (Gleichgewichtspreis) zu bezahlen. Die sich dadurch ergebende Einsparung wird als *Konsumentenrente* bezeichnet:

$$KR = \int_0^{x^*} p^D(x)\,dx - p^* \cdot x^*$$

Einige Anbieter hätten auch zu einem niedrigeren als den Marktpreis verkauft. So entsteht ein zusätzlicher Gewinn namens *Produzentenrente*:

$$PR = p^* \cdot x^* - \int_0^{x^*} p^S(x)\,dx$$

Grafisch zeigt sich dies im linearen Fall wie folgt:



11. Matrizenrechnung

Definition einer Matrix: Rechteckige Anordnung von Elementen

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n}$$

11.1 Spezielle Matrizen

- Zeilenvektor: $\mathbf{b} = (b_1 \quad b_2 \quad \cdots \quad b_n)_{1\times n}$
- Spaltenvektor: $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}_{m\times 1}$
- Quadratische Matrix: Die Dimension der Matrix ist gleich $m \times m$.
  Die Elemente a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{mm} stellen die *Hauptdiagonale* dar.
- Diagonalmatrix **D**: Alle Werte außerhalb der Hauptdiagonalen sind gleich 0.
- Einheitsmatrix **E**: Hauptdiagonalwerte = 1, alle anderen Werte = 0
  Beispiel: $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{3\times 3}$
- Dreiecksmatrix: Alle Werte unterhalb (obere Dreiecksmatrix **O**) oder oberhalb der Hautpdiagonalen (untere Dreiecksmatrix **U**) sind gleich 0.
- Nullmatrix **0**: Alle Elemente der Matrix sind gleich 0.

11.2 Matrizenoperationen

11.2.1 Ordnungsrelationen

Voraussetzung: gleiche Zeilen- und Spaltenzahl der betrachteten Matrizen

$\mathbf{A} = \mathbf{B} \;\leftrightarrow\; a_{ij} = b_{ij}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$ und $j = 1, 2, \ldots, n$

$\mathbf{A} > \mathbf{B} \;\leftrightarrow\; a_{ij} > b_{ij}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$ und $j = 1, 2, \ldots, n$

$\mathbf{A} \geq \mathbf{B} \;\leftrightarrow\; a_{ij} \geq b_{ij}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$ und $j = 1, 2, \ldots, n$

$\mathbf{A} < \mathbf{B} \;\leftrightarrow\; a_{ij} < b_{ij}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$ und $j = 1, 2, \ldots, n$

$\mathbf{A} \leq \mathbf{B} \;\leftrightarrow\; a_{ij} \leq b_{ij}$ für alle $i = 1, 2, \ldots, m$ und $j = 1, 2, \ldots, n$

$\mathbf{A} \neq \mathbf{B} \;\rightarrow$ Es gibt mind. ein Indexpaar (i, j) mit $a_{ij} \neq b_{ij}$.

11.2.2 Transponierte Matrix

Vertauschen von Zeilen und Spalten:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m\times n} \leftrightarrow \mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}_{n\times m}$$

Es gilt:

- $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$
- $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$
- $\mathbf{A}^T = \mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$ ist symmetrisch.
- $\mathbf{A}^T = -\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{A}$ ist schiefsymmetrisch.

11.2.3 Multiplikation einer Matrix mit einem Skalar

Skalar = einfache Zahl

$\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \lambda \leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \cdot \lambda$ für alle i, j

11.2.4 Addition von Matrizen

Voraussetzung: Gleiche Zeilen- und Spaltenzahl

$\mathbf{C} = \mathbf{A} \pm \mathbf{B} \leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}$ für alle i, j

Es gilt:

- $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$
- $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
- $\lambda \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \lambda \cdot \mathbf{A} + \lambda \cdot \mathbf{B}$
- $(\mathbf{A} \pm \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \pm \mathbf{B}^T$
- $\mathbf{A} \pm \mathbf{0} = \mathbf{A}$

11.2.5 Multiplikation von Matrizen

Multiplikation von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nur wenn gilt: $\mathbf{A}_{m\times k}$ und $\mathbf{B}_{k\times n}$

$$\mathbf{A}_{m\times k} \cdot \mathbf{B}_{k\times n} = \mathbf{C}_{m\times n} \leftrightarrow c_{ij} = \mathbf{A}_{i\cdot} \cdot \mathbf{B}_{\cdot j} = \sum_{h=1}^{k} a_{ih} \cdot b_{hj}$$

mit $\mathbf{A}_{i\cdot}$ = i-te Zeile von $\mathbf{A}$

$\mathbf{B}_{\cdot j}$ = j-te Spalte von $\mathbf{B}$

Es gilt:

- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C})$
- $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0}$
- $\mathbf{A} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$

11.2.6 Skalarprodukt und dyadisches Produkt von Vektoren

Skalarprodukt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{k1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad c_{11} = \sum_{h=1}^{k} a_{1h} \cdot b_{h1}$$

Dyadisches Produkt:

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}_{m\times 1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{pmatrix}_{1\times n} = \begin{pmatrix} a_1 \cdot b_1 & a_1 \cdot b_2 & \cdots & a_1 \cdot b_n \\ a_2 \cdot b_1 & a_2 \cdot b_2 & \cdots & a_2 \cdot b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m \cdot b_1 & a_m \cdot b_2 & \cdots & a_m \cdot b_n \end{pmatrix}_{m\times n}$$

11.3 Determinanten

Einer *quadratischen* Matrix **A** wird eine Zahl k zugeordnet, die man Determinante nennt.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{pmatrix}_{m\times m} \quad \rightarrow \det \mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix}=k$$

Berechung:

- 1×1 – Matrix:
  $\mathbf{A}=(a_{11})_{1\times 1} \quad \rightarrow \det \mathbf{A}=|a_{11}|=a_{11}$
- 2×2 – Matrix:
  $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}_{2\times 2} \quad \rightarrow \quad \det \mathbf{A}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}-a_{12}\cdot a_{21}$$
- 3×3 – Matrix: **Regel von Sarrus**
  $$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}_{3\times 3} \quad \rightarrow \quad \mathbf{A}^{erw}=\left(\begin{array}{ccc:cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right)$$

  Es gilt:

  $$\det \mathbf{A}=\underbrace{(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33})+(a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31})+(a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32})}_{\text{Hauptdiagonale und deren Parallelen}}$$
  $$\underbrace{-(a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31})-(a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32})-(a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33})}_{\text{Nebendiagonale und deren Parallelen}}$$

- Übrige quadratische Matrizen: **Entwicklungssatz von Laplace**

  Beispiel: Berechnung von $\det \mathbf{A}=\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

  1Entwicklung nach der *ersten Zeile* (allgemein nach beliebiger Zeile/Spalte möglich):

  Die Elemente der ersten Zeile werden mit den Unterdeterminanten multipliziert, die sich ergeben, wenn man die erste Zeile und die Spalte des jeweiligen Elements aus der Matrix streicht. Man erhält dann bei der (4×4)-Matrix 4 Terme, die nach folgendem Vorzeichenschema verknüpft werden.

  $$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}$$

  1Wenn man nach der ersten Zeile entwickelt, erhält der erste Term ein „+“, der zweite ein „–“ usw. Würde man nach der 2. Zeile entwickeln, müsste man dagegen mit einem „–“ beginnen. Damit ergibt sich:

  $$\det \mathbf{A}=+2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}-5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=104$$

  Es empfiehlt sich die Entwicklung nach der Zeile/Spalte, die die meisten Nullen enthält.

- Fall: Obere oder untere Dreiecksmatrix **A**
  $\rightarrow \det \mathbf{A}=$ Produkt der Hauptdiagonalelemente

Rechenregeln für Determinanten:

- $\det(\lambda \cdot \mathbf{A}_{m\times m}) = \lambda^m \cdot \det \mathbf{A}_{m\times m}$
- $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{B}$
- $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$
- $\det \mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}}$

11.4 Inverse Matrix

Inverse: $\mathbf{A}^{-1} = \dfrac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \mathrm{adj}(\mathbf{A}) \quad \text{mit} \quad \det \mathbf{A} \neq 0$

Berechung der adjungierten Matrix adj(**A**):

$$\mathrm{adj}(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} +|\mathbf{A}_{11}| & -|\mathbf{A}_{12}| & +|\mathbf{A}_{13}| & \cdots \\ -|\mathbf{A}_{21}| & +|\mathbf{A}_{22}| & -|\mathbf{A}_{23}| & \cdots \\ +|\mathbf{A}_{31}| & -|\mathbf{A}_{32}| & +|\mathbf{A}_{33}| & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} +|\mathbf{A}_{11}| & -|\mathbf{A}_{21}| & +|\mathbf{A}_{31}| & \cdots \\ -|\mathbf{A}_{12}| & +|\mathbf{A}_{22}| & -|\mathbf{A}_{32}| & \cdots \\ +|\mathbf{A}_{13}| & -|\mathbf{A}_{23}| & +|\mathbf{A}_{33}| & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Die Matrizen $\mathbf{A}_{ij}$ sind dabei jene, die bei Streichung von Zeile i und Spalte j in der Matrix **A** entstehen.

11.5 Rang einer Matrix

Der *Rang* rg(**A**) der Matrix **A** bezeichnet die *(Maximal)Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren* innerhalb der Matrix. Es gilt allgemein:

- $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) \leq \min\{m,n\}$
- $\mathrm{rg}(\mathbf{A}) = \mathrm{rg}(\mathbf{A}^T)$
- $\mathrm{rg}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) \leq \min\{\mathrm{rg}(\mathbf{A}), \mathrm{rg}(\mathbf{B})\}$

Eine *quadratische* $m \times m$ *- Matrix* hat genau dann *vollen Rang* rg(**A**) = m, wenn ihre *Determinante ungleich Null* ist. Ist ihre *Determinante gleich Null*, so ist der *Rang der Matrix kleiner als ihre Zeilenanzahl.* Wie groß der Rang genau ist, kann in einem solchen Fall nicht unmittelbar angegeben werden. Dazu sind elementare Zeilentransformationen (vgl. Abschnitt 11.6.2) notwendig.

11.6 Lineare Gleichungssysteme

11.6.1 Lösbarkeit

Ein lineares Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Variablen $x_1,x_2,\ldots,x_n$ hat die Form

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}\cdot x_1 & + a_{12}\cdot x_2 & + \ldots & + a_{1n}\cdot x_1 & = & b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 & + a_{22}\cdot x_2 & + \ldots & + a_{2n}\cdot x_2 & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}\cdot x_1 & + a_{m2}\cdot x_2 & + \ldots & + a_{mn}\cdot x_n & = & b_m \end{array}$$

oder in Matrixschreibweise:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{A} \\ \text{Koeffizientenmatrix}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{x} \\ \text{Variablenvektor}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{\substack{\mathbf{b} \\ \text{Ergebnisvektor}}}$$

Ob und wie viele *Lösungen* ein solches Gleichungssystem besitzt, hängt vom Typ des Gleichungssystems und der linearen Abhängigkeit bzw. Unabhängigkeit der Gleichungen des Systems ab.

1. bestimmtes Gleichungssystem (m = n):
   - *eindeutige Lösung*, wenn Gleichungen *linear unabhängig*
   - *unendlich viele Lösungen*, wenn Gleichungen *linear abhängig*

- *keine Lösung*, wenn Gleichungen *widersprüchlich*

2. überbestimmtes Gleichungssystem (m > n):

   i. d. R. *keine Lösung*, es sei denn, die m – n überflüssigen Gleichungen stellen gerade Linearkombinationen der restlichen Gleichungen dar

3. unterbestimmtes Gleichungssystem (m < n):

   i. d. R. *unendlich viele Lösungen*.

11.6.2 Gauß'scher Lösungsalgorithmus

Zur Lösungsfindung wird die Koeffizientenmatrix **A** eines linearen Gleichungssystems um den Ergebnisvektor **b** erweitert und diese neue Matrix $\mathbf{A}^{erw}$ durch elementare Zeilentransformationen in eine Matrix von Dreiecksform überführt:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mm} & b_m \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{Algorithmus}]{\text{Gauß'scher}} \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \cdots & \tilde{a}_{1m} & \tilde{b}_1 \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \cdots & \tilde{a}_{2m} & \tilde{b}_2 \\ 0 & 0 & \tilde{a}_{33} & \cdots & \tilde{a}_{3m} & \tilde{b}_3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \tilde{a}_{mm} & \tilde{b}_m \end{pmatrix}$$

Ergebnisinterpretation:

- Entstehung einer oder mehrerer *Nullzeilen* in der erweiterten Matrix:

  → $\mathbf{A}^{erw}$ besitzt keinen vollen Rang sondern rg($\mathbf{A}^{erw}$) = „Zeilen von $\mathbf{A}^{erw}$ abzüglich entstehende Nullzeilen“. Die Gleichungen des Systems sind linear abhängig und das Gleichungssystem besitzt *unendlich viele Lösungen*

- Es treten *Nullzeilen* auf, deren *letzte Koeffizienten von Null verschieden* sind:

  → Das Gleichungssystem ist widersprüchlich und besitzt *keine Lösung*.

- Es entstehen *keine Nullzeilen* und *keine widersprüchlichen Zeilen*:

  → $\mathbf{A}^{erw}$ besitzt vollen Rang, d. h. die Gleichungen des Systems sind linear unabhängig und das Gleichungssystem ist *eindeutig lösbar*. Umschreiben von $\mathbf{A}^{erw}$ in Gleichungssystemform und Auflösen liefert die Lösung des Systems.

11.6.3 Cramer'sche Regel

Ist ein Gleichungssystem eindeutig lösbar (det **A** ≠ 0), kann seine Lösung mittels der **Cramer'schen Regel** bestimmt werden. Dabei wird wie folgt vorgegangen:

1. Darstellung des Gleichungssystems in Matrixschreibweise $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$. Es muss sich bei der *Koeffizientenmatrix* **A** um eine *quadratische Matrix* handeln.
2. Berechnung der Determinante von **A**, da das Gleichungssystem nur bei det **A** ≠ 0 eine *eindeutige Lösung* besitzt.
3. Wir ersetzen in der Matrix **A** die Spalte j durch den Ergebnisvektor **b** der rechten Seite, wodurch neue Matrizen

   $$\mathbf{A}_j = (\mathbf{A}_{\cdot 1} \ \cdots \ \mathbf{A}_{\cdot j-1} \ \ \mathbf{b} \ \ \mathbf{A}_{\cdot j+1} \ \ \ \mathbf{A}_{\cdot m})$$

   entstehen. Mit diesen Matrizen bzw. ihren Determinanten det $\mathbf{A}_j$ können wir dann die Lösungen x_j des linearen Gleichungssystems bestimmen:

   $$x_j = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \cdot \det \mathbf{A}_j \quad \text{mit} \quad \det \mathbf{A} \neq 0 \quad \text{für} \quad j = 1, 2, \ldots, m$$